17 Translations et vecteurs

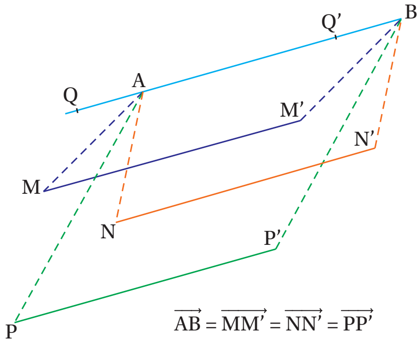
En bref *Lorsque l'on définit une translation, on définit nécessairement un vecteur. Un vecteur symbolise donc un mouvement rectiligne d'un point à un autre.*

I Translations

■ Une **translation** est un procédé qui déplace un point en un autre point selon une règle imposée par deux points fixes.

■ Si on appelle A et B ces deux points fixes, la translation de A vers B transforme un point M en un point M′ de telle sorte que les segments [AM′] et [BM] aient le même milieu, autrement dit que le quadrilatère ABM′M soit un parallélogramme. M′ s'appelle le **translaté** de M.

Exemple : Sur la figure, on a placé les points M, N, P et Q ainsi que leurs translatés par la translation de A vers B.



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'} = \overrightarrow{PP'}$

À NOTER
La translation de A vers B est différente de la translation de B vers A.

II Vecteurs

■ Un **vecteur** symbolise une translation. Il est caractérisé par trois facteurs :
- sa **direction** (par exemple, horizontale ou verticale) ;
- son **sens** (par exemple, de gauche à droite ou de bas en haut) ;
- sa **longueur** (par exemple, 5 carreaux ou 4,2 cm) qu'on appelle aussi sa **norme**.

■ On note $\vec{0}$ le vecteur nul : $\vec{0} = \overrightarrow{AA}$.

■ En mathématiques, une **direction** est définie par une **droite** $\mathscr{D}$. Toutes les droites parallèles à $\mathscr{D}$ ont la même direction que $\mathscr{D}$.

■ Lorsqu'on trace une droite, on peut la parcourir **dans les deux sens** : de gauche à droite ou de droite à gauche (ou encore de bas en haut ou de haut en bas).

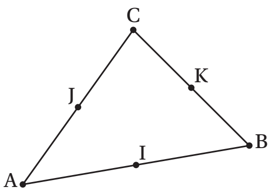
Exemple : Si on place deux points distincts A et B sur une droite, on définit deux vecteurs de sens contraires $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$.

À NOTER
La **norme** de $\vec{u}$ se note $\|\vec{u}\|$.

Méthodes

1 Déterminer des points et des vecteurs liés à des translations

On considère un triangle ABC, et I, J, K les milieux respectifs des côtés [AB], [AC] et [BC]. Compléter le tableau suivant.



L'image de	par la translation de vecteur	est
I	$\overrightarrow{BK}$	....
....	$\overrightarrow{IJ}$	K
J	....	C
....	$2\,\overrightarrow{KJ}$	A

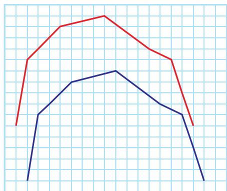
CONSEILS
D'après la réciproque du théorème de Thalès : (JI) // (CB) et (KI) // (CA).

SOLUTION

De haut en bas : J ; B ; $\overrightarrow{IK}$; B.

2 Reconnaître une translation

Les frères Térieur se disputent à propos de la figure ci-contre.



Alain : « J'ai construit la ligne bleue en transformant la ligne rouge par une translation. »

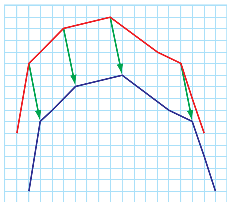
Alex : « Ce n'est pas possible ! La largeur qui les sépare n'est pas constante ! »

Qui a raison : Alain ou Alex ?

CONSEILS
Choisissez deux points sur l'une des figures et observez les positions des deux points correspondants sur l'autre figure.

SOLUTION

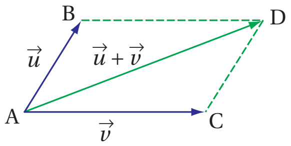
C'est Alain qui a raison : les quatre vecteurs égaux représentés sur la figure ci-contre définissent la translation.



18 Addition de vecteurs

En bref *En additionnant des vecteurs, on peut créer de nouveaux vecteurs ou décomposer des vecteurs existants. On peut également soustraire des vecteurs, ce qui revient à additionner l'opposé d'un vecteur.*

I Somme vectorielle



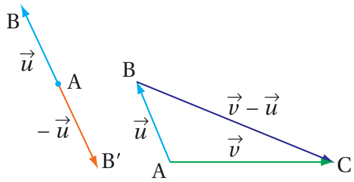
- Soit A, B, C trois points non alignés. Si on pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, on appelle **somme vectorielle** $\vec{u} + \vec{v}$ le vecteur $\vec{w}$ tel que $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$ où ABDC est un **parallélogramme**.
- On peut représenter un vecteur d'une **infinité de façons**. La seule condition à respecter est que ces représentants aient la même direction, le même sens et la même longueur. Pour construire la somme vectorielle de deux vecteurs, on choisit leurs représentants les plus pertinents → MÉTHODE.

À NOTER
Attention à l'ordre des points définissant le parallélogramme : AB**DC**.

- La somme $\vec{u} + \vec{v}$ symbolise l'exécution de **deux translations** l'une à la suite de l'autre : la première de vecteur $\vec{u}$ et la seconde de vecteur $\vec{v}$, ou l'inverse. Ainsi, on part de A pour aller vers B puis de B pour finir en D.

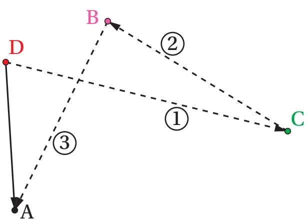
II Applications

1 Opposé et soustraction



- Si on pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, on note $-\vec{u}$ l'**opposé** de $\vec{u}$. On a ainsi : $-\vec{u} = -\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ (ce qui différencie un vecteur de son opposé est son sens).
- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AB'}$ sont opposés, alors B et B′ sont **symétriques** par rapport à A.
- On définit la **soustraction** : $\vec{v} - \vec{u} = \vec{v} + (-\vec{u})$, ou encore : $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$.

2 Relation de Chasles



La relation de Chasles peut se concevoir comme un **raccourci**. On part d'un point de départ D pour aboutir à un point d'arrivée A ; la relation permet de prendre des chemins détournés. Ainsi :

$$\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$$

Remarque : L'arrivée d'un vecteur de la somme est le départ du vecteur suivant.

Méthode

Construire un vecteur somme dont l'origine est donnée

Placer deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ et un point O.

Construire le point S tel que $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.

CONSEILS
On étudie deux cas (suivant que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont ou non la même direction) et on construit E tel que $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{AB}$ et S tel que $\overrightarrow{ES} = \overrightarrow{CD}$.

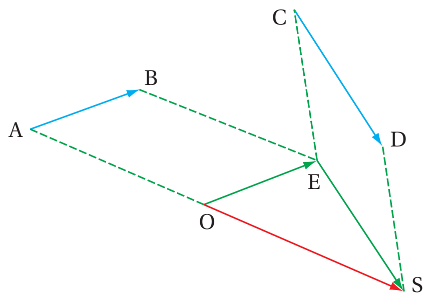
SOLUTION

- **1er cas.** $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ n'ont pas la même direction.

Donc les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.

On a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{ES} = \overrightarrow{OS}$ d'après la relation de Chasles.

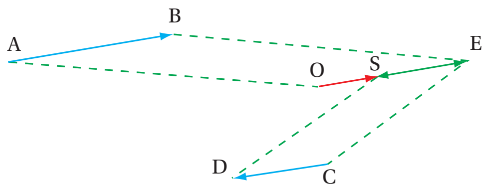
Pour construire $\overrightarrow{OS}$, on part de O pour aller en E puis de E on arrive en S.



- **2d cas.** $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même direction.

Donc les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

On a aussi : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{ES} = \overrightarrow{OS}$ d'après la relation de Chasles.



À NOTER
Dans les deux cas, OABE et ECDS sont des parallélogrammes.

19 Multiplication d'un vecteur par un réel

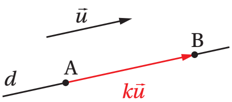
En bref *Il n'est pas possible de définir simplement une multiplication de vecteurs dont le résultat serait encore un vecteur. En revanche, on peut définir la multiplication d'un vecteur par un nombre réel.*

I Définition et propriétés

■ Soit un vecteur $\vec{u}$ et un réel k non nuls. Pour tracer un vecteur $\overrightarrow{AB}$ égal à $k\vec{u}$:

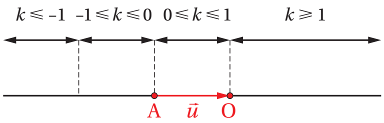
- on trace une droite d de **même direction** que $\vec{u}$ passant par A ;
- à partir du point A, on place sur d le point B de telle sorte que **AB = $|k|u$** où u est la longueur du vecteur $\vec{u}$. Le vecteur $k\vec{u}$ a le même sens que $\vec{u}$ si $k > 0$ et le sens contraire si $k < 0$.

Exemple : Sur la figure ci-contre, $k = 1{,}5$ (positif).



■ Le point B a divers **emplacements selon la valeur de k** :

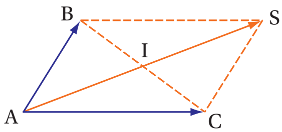
- à gauche de A si $k \leqslant 0$;
- à l'intérieur de [AO] si $0 \leqslant k \leqslant 1$;
- à droite de O si $k \geqslant 1$.



■ **Égalité de la demi-diagonale du parallélogramme**

Si I est le milieu de [BC], on a la relation :

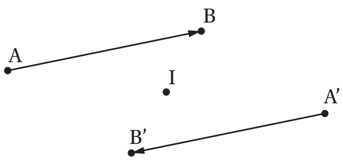
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AS} = 2\overrightarrow{AI}$$



II Effet de transformations sur les vecteurs

■ Par une **symétrie centrale** (ici de centre I), deux points A et B sont transformés en A′ et B′. On a :

$$\overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{AB} = (-1)\overrightarrow{AB}$$



■ Dans une configuration de Thalès, c'est-à-dire lorsque les droites (AB) et (A′B′) des triangles OAB et OA′B′ sont parallèles on a :

$$\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA} \Rightarrow \overrightarrow{OB'} = k\overrightarrow{OB} \text{ et } \overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$$